1. Простые проценты

1.1. Проценты, виды процентных ставок

Под процентными деньгами или ***процентами***, понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигации и т.д.

Под ***процентной ставкой*** понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени — отношение дохода (процентных денег) к сумме долга. Она измеряется в виде десятичной или обыкновенной дроби или в процентах. При выполнении расчетов процентные ставки обычно измеряются в десятичных дробях.

В финансовом анализе процентная ставка применяется как измеритель степени ***доходности*** (эффективности) любой финансовой, кредитной, инвестиционной или коммерческо-хозяйственной деятельности вне зависимости от того, имел место или нет факт непосредственного инвестирования денежных средств и процесс их наращения.

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют ***периодом начисления***. В качестве такого периода принимают год, полугодие, квартал, месяц или даже день. Чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками.

Проценты согласно договоренности между кредитором и заемщиком выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга (капитализация процентов). Процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов называют ***наращением***, или ***ростом***, этой суммы. В этом случае процентные ставки называют ***ставками наращения.***

При ***дисконтировании*** (сокращении) сумма денег, относящаяся к будущему, уменьшается на величину соответствующего ***дисконта*** (скидки). Соответственно говорят, что применяют ***дисконтные***, или ***учетные ставки***.

В финансовой литературе проценты, полученные по ставке наращения, принято называть ***декурсивными***, по учетной ставке — ***антисипативными***. Декурсивные проценты в большинстве случаев называют просто процентами.

Для начисления ***простых*** процентов применяют постоянную базу начисления. Когда за базу принимается сумма, полученная на предыдущем этапе наращения или дисконтирования, используют ***сложные процентные ставки.*** В этом случае база начисления последовательно изменяется, то есть проценты начисляются на проценты.

Процентные ставки могут быть ***фиксированными*** (в контракте указываются их размеры) или ***плавающими***. В последнем случае указывается не сама ставка, а изменяющаяся во времени база (базовая ставка) и размер надбавки к ней — ***маржи***. Размер маржи определяется рядом условий, финансовым положением заемщика, сроком кредита и т.д. Она может быть постоянной или переменной на протяжении срока ссудной операции.

При последовательном погашении задолженности возможны два способа начисления процентов. Согласно первому процентная ставка (простая или сложная) применяется к ***фактической сумме долга***. При втором способе, который применяется в потребительском кредите, простые проценты начисляются сразу на всю сумму долга без учета последовательного его погашения.

В практических расчетах применяют ***дискретные*** проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные интервалы времени (год, полугодие и т.д.). Если наращение или дисконтирование производится непрерывно, за бесконечно малые промежутки времени, применяют ***непрерывные*** проценты. Они используются в аналитических и теоретических финансовых расчетах.

1.2 Наращение по простым процентным ставкам

Под ***наращенной суммой*** ссуды (долга, депозита, других видов выданных в долг или инвестированных денег) понимают первоначальную ее сумму с начисленными процентами к концу срока начисления.

Обозначим:

I — проценты за весь срок ссуды;
P — первоначальная сумма долга;
S — наращенная сумма, т. е. сумма в конце срока;
i — ставка наращения процентов в виде десятичной дроби;
n — срок ссуды.
Начисленные за весь срок проценты составят

$$I = Pni.$$

Наращенная сумма представляет собой сумму первоначальной суммы и наращенных процентов:

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni). \tag{1.1}$$

Выражение (1.1) называют ***формулой простых процентов***.

Выражение (1+ ni) называется ***множителем наращения простых процентов***, который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной.

График роста по простым процентам представлен на рис. 1.

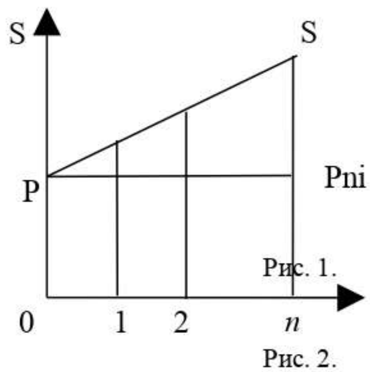

Рис. 1. График роста по простым процентам

> **ПРИМЕР 1.1**. Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 500 тыс.руб., срок 3 года, проценты простые по ставке 10% годовых (i = 0,1):
>
> $\boldsymbol{I}$ = 500 × 5 × 0,1 = 250 *тыс. руб.*,
>
> **S** = 500 + 250 = 750 *тыс. руб.*

Рассмотрим случай, когда срок ссуды величина дробная. Срок n можно представить в виде дроби:

$$n = \frac{t}{K},$$

где t — число дней ссуды, K — число дней в году, или ***временная база начисления процентов***.

При расчете процентов применяют две временные базы.

Если K = 360 дней, то получают ***обыкновенные*** или ***коммерческие*** проценты, а при использовании действительной продолжительности года (365, 366 дней) рассчитывают ***точные проценты***.

Число дней ссуды берут ***приближенно*** и ***точно***.

При приближенном числе дней число дней в месяце берут равным 30 дням. Точное число дней ссуды определяется путем подсчета числа дней между датой выдачи ссуды и датой ее погашения. В соответствии с ГК РФ (п.1 ст. 839 Гражданского Кодекса РФ) дни открытия и закрытия вкладов не включаются в число дней, используемых для начисления процентов. Точное число дней между двумя датами можно подсчитать с помощью программы Microsoft Excel или по таблице дат (приложение 1).

На практике применяются три варианта расчета простых процентов.

1. ***Точные проценты с точным числом дней ссуды (***обозначается ***365/365*** или ACT/ACT). Применяется центральными банками и крупными коммерческими банками в Великобритании, США, дает самые точные результаты.

2. ***Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360*** или ACT/360). Этот метод, иногда называемый банковским, распространен в межстрановых ссудных операциях коммерческих банков, во внутристрановых — во Франции, Бельгии, Швейцарии. Дает несколько больший результат, чем применение точных процентов.

3. ***Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360)***. Такой метод принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании. Применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах.

ПРИМЕР 1.2. Ссуда в размере 1 млн руб. выдана 02.02.03 до 15.11.03 включительно под 10% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов?

Определим число дней ссуды: точное — 285, приближенное — 282, исключая 02.02.03 и 15.11.03.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365):

$$S = 1\,000\,000(1 + \frac{285}{365}0{,}1) = 1078082{,}19 \ \textit{руб}.$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (360/365):

$$S = 1\,000\,000(1 + \frac{285}{360}0{,}1) = 1079166{,}7 \ \textit{руб}.$$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360):

$$S = 1\,000\,000(1 + \frac{282}{360}0{,}1) = 1078333{,}3 \ \textit{руб}.$$

Если по вкладу проводились какие либо операции: снятие части средств или внесение дополнительной суммы, то проценты вычисляются несколько сложнее.

ПРИМЕР 1.3. Ссуда в размере 1 млн руб. выдана 02.02.03 до 15.11.03 включительно под 10% годовых. Однако вкладчик 25.05.03 снял со своего счета 500 тыс. руб., а 02.09.03 внес дополнительно 700 тыс. руб. Какой будет сумма вклада при закрытии счета, при условии начисления обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды?

В течение всего рассматриваемого периода основной вклад менял свою величину. В течение 03.02.-24.05.03 (110 дней) он составлял 1 млн руб., в течение 25.05.-01.09.03 (99 дней) он составлял 500 тыс.руб. и с 2.09 по 14.11.03 (73 дня) – 1200 тыс.руб.

Рассчитаем проценты двумя способами.

1. Найдем средневзвешенный остаток вклада

$$\frac{1\times 110+0{,}5\times 99+1{,}2\times 73}{285}=0{,}8670175 \text{ млн руб.}$$

Находим проценты за 285 дней с этой суммы:

$$I=8670175\times\frac{285}{365}0{,}1=67698{,}63 \text{ руб.}$$

2. Вычислим отдельно проценты за каждый из трех периодов и сложим их:

$$I=1\times\frac{110}{365}0{,}1+0{,}5\times\frac{99}{365}0{,}1+1{,}2\times\frac{73}{365}0{,}1=67698{,}63 \text{ руб.}$$

Как видно, получили один и тот же результат.

Наращенная сумма в этом случае составит:

$$S=1200000+67698{,}63=1267698{,}63 \text{ руб.}$$

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. Если это простые ставки, то наращенная на конец срока сумма определяется:

$$S=P(1+n_1i_1+n_2i_2+\ldots+n_mi_m)=P(1+\sum_i n_ii_i),$$

где i_1 — ставка простых процентов в периоде t, n_1 — продолжительность периода с постоянной ставкой, $n=\sum_i n_i$.

ПРИМЕР 1.4. Контракт предусматривает начисление процентов в первый год 10%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Найти множитель наращения за 2 года.

$$1+\sum_i n_ii_i=1+1\times 0{,}1+0{,}5\times 0{,}11+0{,}5\times 0{,}12=1{,}215.$$

В практике при инвестировании средств в краткосрочные депозиты иногда прибегают к неоднократному последовательному повторению наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока, то есть происходит ***реинвестирование*** средств, полученных на каждом этапе наращения, с помощью постоянной или переменной ставок. Наращенная сумма для всего срока составит

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)\ldots + (1 + n_t i_t)\ldots, \tag{1.2}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_t$ — размер ставок, по которым производится реинвестирование.

Если промежуточные сроки начисления и ставки не изменяются во времени, то вместо (1.2) имеем

$$S = p(1 + ni)^m,$$

где m — количество повторений реинвестирования.

ПРИМЕР 1.5. 1 млн руб. положен 1-го января на месячный депозит под 10% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

Если начислять точные проценты (365/365), то

$$S = 1(1 + \frac{31}{365}0{,}1)(1 + \frac{28}{365}0{,}1)(1 + \frac{31}{365}0{,}1) = 1{,}024856 \text{ млн руб.}$$

Начисление обыкновенных процентов (360/360) при реинвестировании дает

$$S = 1(1 + \frac{30}{360}0{,}1)^3 = 1{,}03375 \text{ млн руб.}$$

1.3. Дисконтирование по простым процентным ставкам

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P. Расчет P по S необходим и тогда, когда проценты с суммы S удерживаются вперед, т.е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В этих случаях говорят, что сумма S ***дисконтируется*** или ***учитывается***, сам процесс начисления процентов и их удержание называют ***учетом***, а удержанные проценты, т.е. разность $D = S - P$ — ***дисконтом*** или ***скидкой***. Необходимость дисконтирования возникает, например, при покупке векселей и других краткосрочных обязательств.

Дисконтирование можно рассматривать как определение любой стоимостной величины, относящейся к будущему, на более ранний момент времени.

Этот прием называют ***приведением*** стоимостного показателя к некоторому, обычно начальному, моменту времени.

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, называют ***современной стоимостью***, или ***современной величиной*** будущего платежа S, а иногда — ***текущей***, или ***капитализированной***, ***стоимостью***.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования — ***математическое дисконтирование*** и ***банковский (коммерческий) учет***. В первом случае применяется ставка наращения, во втором — учетная ставка.

Математическое дисконтирование представляет собой нахождение первоначальной суммы по наращенной. То есть из формулы

$$S = P(1 + ni)$$

находим P

$$P = \frac{S}{1 + ni}. \qquad (1.3)$$

Установленная таким путем величина P является ***современной величиной*** суммы S, которая будет выплачена спустя n лет.

Дробь $\frac{1}{(1+ni)}$ называют ***дисконтным***, или ***дисконтирующим***, ***множителем***. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

ПРИМЕР 1.6. Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 1 млн руб. Кредит выдан под 10% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 360 дням?

По формуле (1.3) находим

$$P = \frac{1}{1 + 0{,}5 \times 0{,}1} = 0{,}952380 \text{ млн руб.}$$

Дисконт составляет $D=S-P$=1-0,95238=0,047619 млн руб.

При ***банковском учете*** банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или иному платежному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной на векселе, т.е. покупает (учитывает) его с дисконтом. Получив при наступлении срока векселя деньги, банк реализует процентный доход в виде дисконта. Владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги ранее указанного на нем срока.

Вексель - это ценная бумага, представляющая собой долговую расписку, выполненную в соответствии с требованиями законодательства, то есть на бланке, содержащем наименование, указание срока платежа, места, в котором должен быть совершен платеж, наименование того, кому платеж должен быть совершен, дата и место составления векселя, подпись векселедателя. Выделяют два основных вида векселя – простые и переводные.

Простой вексель – это документ, удостоверяющий безусловное денежное обязательство векселедателя уплатить по наступлению срока обязательства определенную сумму владельцу векселя.

Переводной вексель (тратта) – документ, который выписывается заемщиком (векселедателем) и представляет собой особый приказ непосредственному плательщику (обычно банку) об уплате в указанный срок суммы денег третьему лицу (векселедержателю).

При учете векселя применяется ***банковский***, или ***коммерческий***, учет. Согласно этому методу проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется ***учетная ставка*** d.

Размер дисконта, или суммы учета, равен Snd; если d — годовая учетная ставка, то n измеряется в годах. Таким образом,

$$P = S - Snd = S(1 - nd), \tag{1.4}$$

где n — срок от момента учета до даты погашения векселя.
Дисконтный множитель равен $(1 - nd)$.

Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временной базе K = 360 дней, число дней ссуды обычно берется точным, АСТ/360.

ПРИМЕР 1.7. Вексель выдан на сумму 1 млн руб. с уплатой 17.11.2003. Владелец векселя учел его в банке 23.09.2003 по учетной ставке 10% (ACT/360). Оставшийся до конца срока период равен 55 дням. Полученная при учете сумма (без уплаты комиссионных) равна

$$P = 1\left(1 - \frac{55}{360}0{,}1\right) = 984722{,}2 \ руб.$$

Дисконт составит 100000-984722,2=15277,8 руб.

1.4. Определение срока ссуды и величины процентной ставки

Необходимые для расчета продолжительности ссуды в годах и днях формулы получим из формул (1.1) и (1.4) относительно n.

Срок в годах:

$$n = \frac{S - P}{Pi} = \frac{S/P - 1}{i},$$

$$n = \frac{S - P}{Sd} = \frac{1 - P/S}{d}.$$

Срок в днях, учитывая, что $n = t/K$, где K — временная база):

$$t = \frac{S - P}{Pi}K, \tag{1.5}$$

$$t = \frac{S - P}{Sd}K.$$

ПРИМЕР 1.8. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 10 тыс. руб., вырос до 15 тыс. руб. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 10% годовых (ACT/ACT)? По формуле (1.5) находим

$$t = \frac{15 - 10}{10 \times 0{,}1}365 = 1825 \ дня = 5 \ лет.$$

Для определения финансовой эффективности операции и при сравнении контрактов по их доходности в случаях, когда процентные ставки в явном виде не указаны, применяем следующие формулы для сроков, измеренных в годах и днях:

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - P}{Pt}K, \tag{1.6}$$

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - P}{St}K. \tag{1.7}$$

ПРИМЕР 1.9. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 100 тыс. руб. через 180 дней. Первоначальная сумма долга 80 тыс. руб. (АСТ/360). Определить доходность ссудной операции для кредитора в виде ставки процента и учетной ставки.

По формулам (1.6) и (1.7) находим

$$i = \frac{100 - 80}{80 \times 180} 360 = 0{,}5 \text{ или } 50\%,$$

$$d = \frac{100 - 80}{100 \times 180} 360 = 0{,}4 \text{ или } 40\%.$$

1.5. Наращение процентов в потребительском кредите

В потребительском кредите проценты, как правило, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита.

Погашение долга с процентами производится частями, обычно равными суммами на протяжении всего срока кредита.

Таким образом, наращенная сумма на весь срок равна

$$S = P(1 + ni),$$

величина разового погасительного платежа составит

$$R = \frac{S}{nm}, \tag{1.8}$$

где n — срок кредита в годах, m — число платежей в году.

В связи с тем, что проценты здесь начисляются на первоначальную сумму долга, а его фактическая величина систематически уменьшается во времени, действительная стоимость кредита заметно превышает договорную процентную ставку.

ПРИМЕР 1.10. Кредит для покупки товара на сумму 1млн руб. открыт на 4 года, процентная ставка — 10% годовых, выплаты в конце каждого месяца. Сумма долга с процентами

$$S = 1(1 + 4 \times 0{,}1) = 1{,}4 \text{ млн руб}.$$

Ежемесячные платежи:

$$R = \frac{1400}{4 \times 12} = 29{,}17 \text{ тыс. руб}.$$

1.6. Замена платежей

На практике возникают случаи, когда необходимо заменить одно денежное обязательство другим, например, с более отдаленным сроком платежа, объединить несколько платежей в один (консолидировать платежи) и т.п. Возникает вопрос о ***финансовой эквивалентности обязательств***.

Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи приведенными к одному моменту времени, оказываются равными. То есть две суммы S_1 и S_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные (или наращенные) величины, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, одинаковы.

Допустим, сравниваются два платежа S_1 и S_2 со сроками n_1 и n_2, причем $S_1 < S_2$ и $n_1 < n_2$. С ростом i размеры современных стоимостей P_1, P_2 уменьшаются. На основе равенства

$$\frac{S_1}{1+n_1 i_0} = \frac{S_2}{1+n_2 i_0}$$

находим

$$i_0 = \frac{1-\dfrac{S_1}{S_2}}{\dfrac{S_1}{S_2}n_2 - n_1}.$$

При ставке $i = i_0$ наблюдается равенство $P_1 = P_2$. Назовем ставку i_0, при которой достигается равенство первоначальных сумм, ***критической*** или ***барьерной***.

ПРИМЕР 1.11. Имеются два обязательства. Условия первого: выплатить 400 тыс. руб. через 4 месяца; условия второго: выплатить 450 тыс. рублей через 8 месяцев. Можно ли считать их равноценными?

Так как платежи краткосрочные, то при дисконтировании на начало срока применим простую ставку, равную, допустим, 20%. Получим

$$P_1 = \frac{400}{1+\frac{4}{12}0{,}2} = 375{,}00 \text{ тыс. руб.},$$

$$P_2 = \frac{450}{1+\frac{8}{12}0{,}2} = 397{,}06 \text{ тыс. руб.}$$

Как видим, сравниваемые обязательства не являются эквивалентными при заданной ставке и в силу этого не могут адекватно заменять друг друга.

Определим барьерную ставку:

$$i_0 = \frac{1 - \frac{400}{450}}{\frac{400}{450} \times \frac{8}{12} - \frac{4}{12}} = 0{,}428 \text{ или } 42{,}8\%$$

Таким образом, соотношение $P_1 < P_2$ справедливо при любом уровне процентной ставки, который меньше 42,8%.

Одним из распространенных случаев изменения условий контрактов является ***консолидация*** (объединение) платежей. Пусть платежи S_1, S_2, …, S_m со сроками n_1, n_2, …n_m заменяются одним S_0 и сроком n_0.

При применении простых процентных ставок сумму консолидированного платежа можно найти по формулам:

- $S_0 = \sum\limits_j S_j(1 + t_j i), \quad при\ n_0 \geq n_1, n_2, \ldots, n_m$, где $t_j = n_0 - n_j$;
- $S_0 = \sum\limits_j S_j(1 + t_j i) + \sum\limits_k S_k(1 + t_k i)^{-1}, \qquad при\ n_1 \leq n_0 \leq n_m$,

где $t_j = n_0 - n_j$, $t_k = n_k - n_0$,

S_j – сумма объединяемых платежей со сроком n_j ($n_j \leq n_0$),

S_k – сумма объединяемых платежей со сроком n_k ($n_k \geq n_0$).

ПРИМЕР 1.12. Два платежа 1 и 0,5 млн руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Пусть стороны договорились на применение простой ставки, равной 20%. Консолидированная сумма долга составит

$$S_0 = 1000\left(1 + \frac{200 - 150}{365}0{,}2\right) + 500\left(1 + \frac{200 - 180}{365}0{,}2\right) = 1532{,}87 \text{ тыс. руб}.$$

1.7. Контур финансовой операции

Пусть выдана ссуда на срок T размере P. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся, допустим, два платежа R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается остаток задолженности в сумме R_3 На интервале t_1 задолженность возрастает, в силу начисления процентов, до величины P_1 . В конце этого периода выплачивается в счет погашения задолженности сумма R_1. Долг уменьшается до K_1 и т.д. Заканчивается операция получением кредитором в окончательный расчет суммы R_3. В этот момент задолженность должна быть равна нулю. Такой график называется ***контуром операции***.

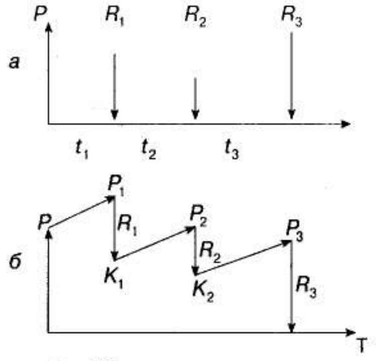

Рис. 2. Контур операции

Сбалансированная операция, при которой последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности, обязательно имеет замкнутый контур (рис. 2).